第 27 卷第 2 期
2007 年 6 月

数学理论与应用
MATHEMATICAL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 27 No. 2
Jun. 2007

超积空间及其性质*

陈 雪
(厦门大学数学科学学院, 厦门, 361005)

摘 要 引进了和内积空间没有相互包含关系的一类新空间:超积空间, 进而研究了超积空间的性质. 这类新的线性空间具有许多内积空间的重要性质, 从而得到了线性空间一类新的度量刻画.

关键词 超积空间 线性空间 空间

On Super Spaces and their Properties

Chen Xue
(School of Mathematical Science, Xiamen University, Xiamen, 361005)

Abstract We introduce, in this paper, a new lindar space: supper space. Many properties of such space are studied. It is shown that this new kind of linear space possesses many known properties of Euclidean spaces.

Keywords spper space linear space space

1 引 言

设 V 是实数域 R 上的线性空间, 在 V 上定义了一个二元实函数, 称为内积, 此时称 V 为内积空间(或欧氏空间), 欧氏空间是应用最为广泛的线性空间之一, 它完美地度量了空间的距离. 本文引进了一类新的线性空间: 超积空间. 它和内积空间没有相互包含的关系, 但另一方面, 欧氏空间中很多重要性质却被超积空间遗传了下来, 进而使我们能从一个新的角度来探求线性空间的性质.

定义 1 设 V 是实数域 R 上的线性空间, 若存在某种规则, 使对 V 中任意一组有序向量 $\{x, y\}$ 都唯一地对应一个实数, 记为 $[x, y]$, 其适合如下规则:

(1) $[x, y] = [y, x]$;

(2) $[x + y, z] \leq [x, z] + [y, z]$;

(3) $[cx, y] \leq |c| [x, y]$, c 为任一实数;

(4) $[x, y] \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $x = 0$.

则称在 V 上定义了一个超积, 实数 $[x, y]$ 称为 x 与 y 的超积, 线性空间 V 称为超积空间.

例 1 设 R^n 是实 n 维列向量空间, $x = (x_1, \cdots, x_n)'$, $y = (y_1, \cdots, y_n)'$

* 欧阳相玉教授推荐
收稿日期: 2006 年 12 月 17 日

定义$[x,y]=|x_1y_1|+\cdots+|x_ny_n|=\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i|$，则我们定义了一个超积，这个超积称为 R^n 中的标准超积.

例 2 设 $V=R^2$ 为二维实行向量空间，若

$x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)$，定义$[x,y]=|x_1y_1-x_2y_1-x_1y_2+4x_2y_2|$，易证 R^2 在此超积下成为二维超积空间.

例 3 设 V 是$[a,b]$区间上连续函数全体构成的实线性空间，设$f(t),g(t)\in V$，定义 $[f,g]=\int|f(t)g(t)|dt$，不难验证这里的 V 是超积空间，这是个无限维超积空间.

一般地，内积空间和超积空间并没有相互包含的关系. 设 V 是欧氏空间，(x,y) 为 V 上的内积，若定义$[x,y]=\sqrt{(x,x)(y,y)}$，则可以验证$[x,y]$为超积，从而 V 成为一个超积空间.

定义 2 设 V 是超积空间，x 为 V 中的元素，定义 x 的长度为 $\|x\|=[x,x]^{\frac{1}{2}}$

引理 1 设 $y=ax^2+b|x|+c(a>0)$，那么 $b^2-4a\leq 0$.

定理 1 设 V 时超积空间，$x,y\in V$，则

(1) $[x,y]\leq\|x\|\|y\|$； (2) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

证明 (1) 若 $x=y=0$，显然有$[x,y]=0=\|x\|\|y\|$.

若 $x\neq 0$，则$[x,x]>0$，注意到

$$\begin{aligned}0&\leq[y+tx,y+tx]\\&\leq[y,y+tx]+[tx,y+tx]\\&\leq[y,y]+[y,tx]+[tx,y]+[tx,tx]\\&\leq[x,x]t^2+2[x,y]\cdot|t|+[y,y]\end{aligned}$$

令$f(t)=[x,x]t^2+2[x,y]|t|+[y,y]$，则对任何实数$t$，有$f(t)\geq 0$，且$[x,y]>0$. 根据引理 1 知，$(2[x,y])^2-4[x,x][y,y]\leq 0$，即$|[x,y]|\leq\|x\|\cdot\|y\|$，更有不等式

$$[x,y]\leq\|x\|\cdot\|y\|$$

若 $y\neq 0$，由$[x+ty,x+ty]\geq 0$，可以类似地得证

(2) 由(1) 易得.

推论 1 设 V 为超积空间，$x,y\in V$，则有 $\|x-y\|\geq\|x\|-\|y\|$.

定理 2 设 V 为超积空间，$x,y\in V,c\in R$，则有$[cx,y]=|c|[x,y]$.

证明 若 $c=0$，则对任何 $y\in V$，有$[0,y]=[0+0,y]\leq[0,y]+[0,y]$，故$[0,y]\geq 0$；另一方面，$[0,y]=[0\times 0,y]\leq 0\cdot[0,y]=0$，故$[0,y]=0$，从而$[cx,y]=|c|\cdot[x,y]$.

若 $c\neq 0$，则有

$$[cx,y]\leq|c|[x,y]=|c|[\frac{1}{c}\cdot cx,y]\leq|c|\cdot\frac{1}{|c|}\cdot[cx,y]=[cx,y]$$

故$[cx,y]=|c|\cdot[x,y]$，因而在任何情况下都有$[cx,y]|c|\cdot[x,y]$.

推论 2 设 V 为超积空间，$x,y\in V,c\in R$，则有 $\|cx\|=|c|\cdot\|x\|$.

推论 3 设 V 为超积空间，$x,y\in V$，则$[x,y]\geq 0$.

证明 $$\begin{aligned}[x,y]&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot[x,y]=\frac{1}{2}([x,y]+[x,y])=\frac{1}{2}([x,y]+[-x,y])\\&\geq\frac{1}{2}[x+(-x),y]=\frac{1}{2}[0,y]=\frac{1}{2}\cdot 0\cdot[0,y]=0.\end{aligned}$$

命题1 设 V 为超积空间,非零向量 $u_1\cdots, U_n \in V$,若 $[u_i, u_j] = 0(i \neq j)$,则 $u_1, \cdots, u_n$ 线性无关.

设 U 是超积空间 V 的子空间,令 $U^{\perp}= \{v \in V | [v, U] = 0\}$,其中 $[v, U] = 0$ 表示 $(v, u) = 0, \forall u \in U$.易知 $U^{\perp}$ 是 U 的子空间,称为子空间 U 的正交补空间.

命题2 设 U 是超积空间 V 的子空间,若 U 由几量 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 生成,则

$$U^{\perp}= \{v \in V | [v, u_i] = 0, i = 1, 2, \cdots, m\}.$$

命题3 设 U_1, U_2 是超积空间 V 的子空间,则

(1) $(U_1 + U_2)^{\perp}= U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$;

(2) $U_1^{\perp} + U_2^{\perp} \subseteq (U_1 \cap U_2)^{\perp}$

一个有趣的问题是超积空间是否一定有正交基?事实上,超积空间未必有正交基.

例4 设 $V = R^2$ 是二维行向量空间,若 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$,定义 $[x, y] = |x_1y_1| + |x_2y_2|$,则 V 为超积空间,$e = (1, 0), f = (0, 1)$ 为 V 的一组正交基.

例5 设 $V = R^2$ 是二维行向量空间,若

$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$,定义 $[x, y] = (|x_1| + |x_2|)(|y_1| + |y_2|)$,则 V 是超积空间.

若 $e = (e_1, e_2), f = (f_1, f_2)$ 为 V 的正交基,则 $[e, f] = 0$,即

$$(|e_1| + |e_2|)(|f_1| + |f_2|) = 0,$$

这样 $e_1 = e_2 = 0$ 或者 $f_1 = f_2 = 0$,从而 $e = 0$ 或 $f = 0$,故 e, f 不可能为 V 的基.由此可知此时超积空间不具有正交基.

具有有限维的正交基的超积空间称为完全超积空间,其长度为1的正交基称为它的标准正交基.

命题4 完全超积空间有一组标准正交基.

定理3 设 V 是超积空间,$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 V 的一组标准正交基,f 是 V 上的线性函数,则存在 $v \in V$,使得 $f(e_1) = [e_i, v]. i = 1, 2, \cdots, n$.

超积空间还有许多类似于欧氏空间的有趣的性质,限于篇幅不再详述.

参考文献

[1] 姚慕生. 高等代数学,复旦大学出版社,2003.

[2] 姚慕生. 高等代数(数学学习方法指导),复旦大学出版社,2002.

[3] L. Herstei. Matrix Teory and Linear Algebra, Macmillan Publ. Com. 1988.

[4] C. Wilde. Linear Algebra, Addison- Wesley, Publ. Com. 1987.